Processus en temps discret

M1 Maths, UFR de Mathématiques, Université de Paris

DM 1

Dans les énoncés, on utilise la notation $\mathbb{P}_x$ pour la loi d'une suite $(X_i)_{i\geq 0}$ sous la conditon initiale $X_0 = x$.

Exercice 1 : On considère une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ issue de 0, qu'on notera S_n. On notera $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa filtration canonique. Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in (0, \frac{\pi}{2a})$.

1. Soit $T_a := \inf\{n \in \mathbb{N}; |S_n| \geq a\}$. Montrer que T_a est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On pose $W_n := \cos(\lambda S_n)\cos(\lambda)^{-n}$. Montrer que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$\cos(\lambda a)\cos(\lambda)^{-(n\wedge T_a)} \leq W_{n\wedge T_a} \leq \cos(\lambda)^{-T_a}.$$
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$\mathbb{E}[\cos(\lambda a)\cos(\lambda)^{-(n\wedge T_a)}] \leq 1.$$
5. En déduire que T_a est fini p.s. et que $\mathbb{E}[\cos(\lambda)^{-T_a}] \leq \cos(\lambda a)^{-1}$.
6. En utilisant les questions précédentes, calculer $\mathbb{E}[\cos(\lambda)^{-T_a}]$.

Exercice 2 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et intégrables. On note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, .., X_n)$, et on considère un temps d'arrêt T par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que l'on supposera intégrable et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Le but de cet exercice est de démontrer l'identité
$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{T} X_i\right] = \mathbb{E}[T]\mathbb{E}[X_1]. \tag{1}$$

1. Montrer que $\mathbb{E}[T] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[T \geq i]$.
2. Montrer que $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i - n\mathbb{E}[X_1]$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.
3. Montrer que $\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n\wedge T} |X_i|\right]$ est bornée indépendament de n.
4. Montrer que $(S_{n\wedge T})_{n\geq 1}$ est fermée.
5. En déduire (1).

Exercice 3 : On considère un jeu de cartes standard, c'est à dire qu'il y a 52 cartes, dont 26 sont rouges et 26 sont noires. On retourne les cartes une à une, et à chaque instant le joueur à le droit de dire que la prochaine carte est noire, ou de passer a la carte suivante. Si il a raison, il gagne, et sinon il perd. En particulier, le joueur ne pourra parler qu'une seule fois. On note N_n le nombre de cartes noires restant dans le paquet après avoir retourné la n-ième carte, et A_n l'évenement "'la n-ième carte retournée est noire"'.

1. Calculer $\mathbb{P}[A_{n+1}|N_n = j]$ pour $n \in \{0, .., 50\}$ et $j \in \{0, .., 26\}$.
2. Montrer que $X_n := N_n/(52 - n)$ est une martingale.
3. Montrer que la probabilité de victoire ne dépend pas de la stratégie choisie, et calculer cette probabilité.

Exercice 4 : On se donne une chaîne de Markov sur l'espace $\{1, 2, 3\}$, avec pour matrice de transition $Q = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 2/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$.

1. Cette chaîne de Markov est-elle récurrente ? Transiente ? Irréductible ?
2. Calculer $\mathbb{P}_1(X_2 = 3)$.
3. Calculer la mesure de probabilité invariante.